Поговорим про спиральности. Задачи на неё ну очень любят давать на всяких зачётах и КР (по крайней мере, это относится к Парфёнову). Поэтому давайте изучим на примерах, что это такое.

1. (20) Найти среднее значение и дисперсию спиральности частицы Дирака в состоянии

$$\Psi(t,\vec{r}) = N\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\cdot\exp\left[-\frac{imc}{\hbar}(2\sqrt{2}\,z+3ct)\right].$$

Что такое спиральность? Это некий аналог спина, только для частицы Дирака. Смотрите: так выглядит ВФ с спиральностью λ=1/2, т.е. для спиральности вдоль оси z: ↑

$$\Psi(z,t) = C * e^{\frac{i(Et-pz)}{h}} * \begin{matrix}1\\ 0\\ \frac{-pc}{E}\\ 0\end{matrix}$$

А вот так – со спиральностью λ=-1/2, т.е. также для спиральности вдоль оси z, но уже вниз: ↓

$$\Psi(z,t) = C * e^{\frac{i(Et-pz)}{h}} * \begin{matrix}0\\ 1\\ 0\\ \frac{pc}{E}\end{matrix}$$

Сравните с тем, что было раньше: спинор для частицы с проекцией спина на ось z +1/2: $\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}$ и -1/2: $\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}$. Аналогия очевидна.

Любую дираковскую ВФ можно представить в виде суперпозиции двух собственных поляризаций.
Представим ВФ из условия в виде суперпозиции:

$$\begin{matrix}\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\\ -1\\ 2\end{matrix} = A * \begin{matrix}1\\ 0\\ \frac{-pc}{E}\\ 0\end{matrix} + B * \begin{matrix}0\\ 1\\ 0\\ \frac{pc}{E}\end{matrix} = \begin{matrix}A\\ B\\ \frac{-Apc}{E}\\ \frac{Bpc}{E}\end{matrix}$$

Где A и B – вклады спиральностей в итоговую ВФ.

Из $\begin{matrix}\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\\ -1\\ 2\end{matrix} = \begin{matrix}A\\ B\\ \frac{-Apc}{E}\\ \frac{Bpc}{E}\end{matrix}$ видно, что $\frac{pc}{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}, A = \sqrt{2}, B = 2\sqrt{2}$

Далее нормируем A и B: условия нормировки $|A|^2 + |B|^2 = 1$ получаем $A = \frac{1}{\sqrt{5}}, B = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Тогда СЗ спиральности будет $|A|^2 * \frac{1}{2} + |B|^2 * \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{5} * \frac{1}{2} + \frac{4}{5} * \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{10} - \frac{4}{10} = -\frac{3}{10}$

Дисперсия спиральности – это средний квадрат отклонения, т.е. $|A|^2 \left(\frac{1}{2} - \text{СЗ спиральности}\right)^2 + \ |B|^2 \left(-\frac{1}{2} - \text{СЗ спиральности}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{5} * \frac{8}{10} + \frac{4}{5} * \frac{2}{10} = \frac{8}{50} + \frac{8}{50} = \frac{16}{50}$

Ещё задача:

(20) Найти среднее значение и дисперсию проекции спина на ось z свободной частицы Дирака, находящейся в состоянии с $\varepsilon = +1, \lambda = +1, \vec{p} = p\vec{n}(\vartheta, \phi)$ для $\vartheta = \pi/6, \phi = \pi/4$.

Как мы видим, импульс направлен не вдоль оси z.

На самом деле это кажется, что задача на спиральность. На самом деле задача на 6-й семестр. Если бы импульс был бы вдоль оси z, верхний спинор был бы $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ и λ была бы 100% +1/2. Так давайте повернём СК, чтобы ось z совпала с импульсом. Тогда как изменится спинор $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$? А тут у нас есть матрица перехода из 6-го сема:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & e^{-i\varphi} sin\theta \\ e^{i\varphi} sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}$$

Есть небольшое отличие от 6-го сема: не θ, а θ/2:

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\varphi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Действуем ей на старый спинор

$$\begin{pmatrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{-i\varphi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & -cos\theta \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \begin{matrix} cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ e^{i\varphi} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{matrix}$$

И получаем спинор в новой СК. Квадрат верхнего числа – вероятность измерить проекцию спина=1/2 (т.е. спиральность 1), а снизу - проекцию спина=-1/2 (т.е. спиральность -1).

Вот и получаем $< \lambda > = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) * 1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) * (-1) = \cos\theta = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

А дисперсия $=< \lambda^2 > -< \lambda >^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) * 1^2 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) * 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Средняя спиральность фотонов пучка равна -0,3. С какой вероятностью при измерении спиральности будет получено значение +1?

Выберите один ответ:

- a. 0,25
- b. 0,3
- c. 0,35
- d. 0,4

Спиральность спиральностью рознь. На этот раз у нас не спиральность частицы Дирака (а это, я напомню, частица со спином ½), а фотона (он уже не описывается уравнением Дирака, но нам пофиг, на решение это никак не влияет). Разница небольшая – просто теперь она принимает значения -1 и 1, а не -1/2 и ½.

От нас просят вероятность измерить +1. Пусть это p. Тогда вероятность измерить -1 есть 1-p.

Среднее – это матожидание, т.е

$$(-1) * \text{вероятность измерить} - 1 \quad + 1 * \text{вероятность измерить}(+1) = (-1) * (1-p) + (+1) * p = 2p - 1$$

И это по условию -0,3. Тогда

$$2p - 1 = -0{,}3$$
$$2p = 0{,}7$$
$$p = 0{,}35$$

Ответ: 0,35.